

COMPARANDO A LACUNARIDADE FRACTAL E O DESCRITOR MORFOLÓGICO FRACTAL COMO CRITÉRIO TOPOGRÁFICO NA ANÁLISE DE COMPONENTES INDEPENDENTES

KLAUS FABIAN CÔCO, EVANDRO OTTONI TEATINI SALLES, MÁRIO SARCINELLI FILHO

Laboratório de Sistemas Neurais, Universidade Federal do Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari, 514 29075-910 Vitória, ES

klaus@ele.ufes.br, evandro@ele.ufes.br, mario.sarcinelli@ele.ufes.br

Abstract— In this paper we exploit the TICA technique (Topographic Independent Component Analysis) when a fractal descriptor is used as topographic criterion. The performance of such a technique when using the morphological fractal descriptor or the lacunarity fractal descriptor as parameter of the topographic model is compared. The two resulting techniques are then applied to Brodatz' images and images obtained from a satellite in order to evaluate which fractal descriptor is more suitable, in each case.

Keywords— TICA, Morphology, Lacunarity, Fractal Descriptor, Random Fractals.

Resumo— O presente trabalho aborda a Análise Topográfica de Componentes Independentes (*Topographic Independent Component Analysis – TICA*) comparando o uso de um descritor fractal morfológico com a medida de lacunaridade fractal no critério topográfico do modelo. A técnica é aplicada a imagens de Brodatz e em imagens de satélite visando obter uma representação que seja mais adequada que a técnica TICA baseada no uso da energia como critério topográfico, para imagens com características estatísticas fractais.

Palavras-chave— TICA, Morfologia, Lacunaridade, Descritor Fractal, Fractais Aleatórios.

1 Introdução

Por volta da década de 60, Julesz, conforme citado por Pratt (1991), procurou determinar os parâmetros de texturas com importância perceptiva para o ser humano, e concluiu que somente é possível a distinção entre texturas que possuam diferenças na primeira e segunda ordem estatística.

Estudos posteriores de Pratt e Faugeras (1991) mostraram que o sistema de visão humana é sensível não somente às diferenças na média e variância, mas também à auto-correlação dos pares de texturas. Outros estudos sugerem que o cérebro efetua análise frequencial multicanal e análise de orientação das imagens visuais formadas na retina (Daugman, 1985). Mais especificamente, Daugman (1985) mostrou que os campos receptivos 2-D medidos para células simples do córtex primário em um gato (células em V1) são aproximados por campos de Gabor, representados em múltiplas frequências, com informação de fase e de localização.

Durante algum tempo, esses resultados motivaram a modelagem de texturas pelas funções de Gabor, o que, a princípio, permitiria a construção de classificadores que esgotassem os limites da percepção humana sobre texturas. Todavia, estatísticas de ordem superior, como a distância dos deslocamentos de níveis de cinza ou o espectro de fase de Fourier, também podem ser medidos e usados para a classificação de texturas (Blanco, 1987). Por exemplo, a alta ordem estatística em texturas naturais reside basicamente no espectro de fase da transformada de Fourier, que complementa o espectro de potência (segunda ordem estatística) (Dói e Lewicki, 2005).

Sabe-se, porém, que fractais são excelentes descritores de bordas, o que permite afirmar que também efetuam análise estatística de alta ordem (Pentland, 1984; Du Gan, 1998; Kasparis, et al., 2001). De fato, os fractais estatísticos interpretam uma superfície textural 2-D como um modelo 3-D, não se restringindo somente à representação de texturas pela segunda ordem estatística de Julesz, mas também incorporando à representação, através da frequência espacial inserida indiretamente na dimensão fractal, informações estatísticas de alta ordem, permitindo explorar a segmentação de texturas em concordância com Gagalowicz (Pentland, 1984).

Muitas das representações na análise de componentes independentes, ICA (*Independent Component Analysis*), permitem a geração de bases em que as componentes são campos de Gabor. Isso vem permitindo justificar o uso dessa técnica como modelo de aproximação para as células simples do córtex visual primário (V1) (Hyvärinen, Karhunen e Oja, 2001). Todavia, pode-se questionar se o modelo empírico das células em V1, definido em (Daugman, 1985), sugerindo que o sistema visual captura regularidades estatísticas de alta ordem através de projeções lineares de funções de Gabor, é adequado à segmentação de texturas. Esse questionamento é reforçado pelo estudo apresentado em (Jenssen e Eltoft, 2003), que compara a segmentação de texturas usando a ICA e campos de Gabor, e mostra que a ICA permite melhores resultados.

A ICA, por sua vez, é uma técnica de separação cega de fontes que se utiliza de estatística de alta ordem na obtenção de suas componentes independentes. Vários experimentos utilizando a ICA têm sido desenvolvidos, visando a geração de modelos de alta ordem estatística genéricos para representação de

imagens em que a modelagem obtida é expressa como um somatório balanceado de bases da imagem.

Sabe-se, porém, que texturas naturais são bem representadas por distribuições não gaussianas que podem ser obtidas através da ICA. A ICA tem mostrado que a modelagem de texturas naturais com estatísticas de alta ordem não-Gaussiana é possível, e que as funções dos filtros no modelo ICA correspondem aos campos receptivos das células simples, em V1, de estrutura localizada e orientada (Bell e Sejnowski, 1997; Hyvärinen, Karhunen e Oja, 2001).

Apesar de a ICA buscar a representação estatisticamente independente, os resultados obtidos em texturas naturais exibem uma dependência residual, que significa uma necessidade de organização espacial entre as componentes (Hyvärinen, Hoyer e Inki, 2001). Sabe-se, ainda, que o modelo ICA permite a modelagem apenas das células simples (lineares) da classe de células em V1, não sendo possível modelar, diretamente, as células complexas que possuem as propriedades de invariância à fase e ao deslocamento bem como as demais células das diferentes regiões do córtex cerebral (V2, V3, ..., V5) (Hyvärinen e Hoyer, 2000).

Nesse sentido, uma variante da técnica ICA, conhecida como Análise Topográfica de Componentes Independentes (*Topographic Independent Component Analysis* – TICA), permite a aproximação do modelo ICA ao sistema de visão humana de maneira mais precisa. A TICA insere uma organização espacial no modelo da ICA o que pode ser visto como uma organização topográfica das células simples no córtex visual primário (Hyvärinen, Hoyer e Inki, 2001).

Tendo estes aspectos em conta, o que se propõe neste trabalho é buscar uma forma de modelagem que mais se aproxime do modelo humano de visão. A intenção não é definir um modelo final acerca do comportamento estatístico das células em V1, mas inserir na TICA um pouco do comportamento das células em V2 (córtex secundário) e outras nuances das células complexas em V1, através da modelagem fractal, elaborando uma comparação entre duas conjecturas acerca da organização espacial dessas células na forma de modelos fractais. Especificamente, é estabelecida uma comparação entre o uso de descritor fractal morfológico, LMME, (Côco, Salles e Sarcinelli Filho, 2006) e a medida de lacunaridade fractal, como critério topográfico na representação de texturas com auto-similaridades estatísticas. A escolha da lacunaridade, neste trabalho, se deve ao uso de características de alta ordem estatística na determinação das “lacunas” das imagens, como, por exemplo, as bordas entre distintas regiões da imagem sob análise.

O estabelecimento de modelos fractais para a função de vizinhança no critério topográfico da TICA, bem como a sua aplicabilidade na indústria e pesquisa, já foi discutido em outros trabalhos dos autores Côco, Salles e Sarcinelli Filho (2005, 2006, 2007).

Nas seções subsequentes serão apresentados o fundamento matemático das técnicas utilizadas, a metodologia dos experimentos, resultados, análise e conclusões obtidas.

2 Suporte Matemático

2.1 Análise de Componentes Independentes

No modelo ICA, a mistura X é a informação à priori, e é composta por N janelas aleatórias da imagem, representadas como vetores coluna da matriz X , $\bar{x} = [x_1, \dots, x_M]^T$. Matematicamente, o modelo é expresso como

$$X_{M \times N} = A_{M \times P} S_{P \times N}, \quad (1)$$

onde $A_{M \times P}$ é a matriz de mistura e $S_{P \times N}$ é a matriz de componentes tão estatisticamente independentes quanto possível. Se não há redução de dimensionalidade no processo de branqueamento (usado para separar as características estatísticas de baixa ordem) para obtenção do modelo ICA, então $P = M$.

Os algoritmos para obtenção do modelo ICA são discutidos em (Hyvärinen, Karhunen e Oja, 2001), e sua discussão foge ao escopo deste trabalho.

2.2 Análise Topográfica de Componentes Independentes

O modelo TICAFM (Côco, Salles e Sarcinelli Filho, 2006) é semelhante ao modelo TICA Energia desenvolvido por Hyvärinen, Karhunen e Oja (2001). As equações que descrevem tais modelos são:

Caso TICA (Energia):

$$\log L(W) = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n G \left(\sum_{i=1}^n h(i, j) \left(w_i^T x(t) \right)^2 \right) + \quad (2)$$

$$T \log |\det W|,$$

Caso TICAFM (Fractal-Morfológico):

$$\log L(W) = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n G \left(\sum_{i=1}^n h(i, j) L_q \left(w_i^T x(t) \right) \right) + \quad (3)$$

$$T \log |\det W|,$$

onde W é a inversa da matriz de mistura A , G é uma transformação não-linear monotônica de números reais positivos, $h(i, j)$ é a função de vizinhança, L_q é o descritor fractal de ordem q e $w_i^T x(t)$ são as componentes independentes não negativas de alta ordem.

O descritor de texturas fractal mostra-se mais robusto e adequado à representação dos caracteres estatísticos em pequenas regiões (Côco, Salles e Sarcinelli Filho, 2006). Não há limitação de seu valor a um intervalo específico, mas ele pode ser comparado ao valor do descritor da janela da imagem, permitindo identificar, por exemplo, onde se localizam as bordas da textura.

2.3 Estimação Fractal Baseada em Morfologia

O modelo utilizado nos experimentos aqui apresentados, nesse caso, é o LMME, que é o mesmo usado em (Côco, Salles e Sarcinelli Filho, 2006), e que é definido como

$$L_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mu_\varepsilon(i, j))}{\ln(N/\varepsilon)}, \quad (8)$$

onde μ_ε é a medida natural local, N é a dimensão da janela, ε é a escala e q é a ordem do descritor fractal morfológico L_q .

2.4 Lacunaridade Fractal

O conceito de auto-similaridade no espaço euclidiano pode ser formulado da seguinte maneira: considere um conjunto limitado L em um n -espaço Euclidiano. O conjunto L é dito ser auto-similar se L está na união de P distintas (não-sobrepostas) cópias de si mesmo, em que cada cópia está escalada para baixo por uma razão menor que um em todas as coordenadas.

Há dois tipos de objetos auto-similares, no que se refere ao campo da geometria fractal: o *objeto auto-similar determinístico*, no qual o fractal é composto de características distintas que remontam cada outro objeto idêntico em diferentes escalas (característica invariante à escala); e o *objeto auto-similar estatístico*, no qual as características do fractal podem mudar em diferentes escalas, mas suas propriedades estatísticas em todas as escalas são as mesmas (invariância estatística à escala) (Turner et al., 1998).

No mundo real, a descrição fractal predominante é a estatística, a qual é a mais útil na modelagem de determinadas texturas (Turner et al., 1998). A quantificação de texturas a partir de fractais é baseada principalmente nas características de auto-similaridade, lacunaridade e dimensão fractal.

A auto-similaridade estatística dos fractais refere-se ao fato de a medida estatística de um sinal ser invariante em relação à transformação de escala (Pentland, 1984). Nesse sentido, uma superfície fractal é uma superfície que pode ser precisamente aproximada por uma função fractal simples sobre uma faixa de escalas.

A *lacunaridade fractal* é uma característica fractal de alta ordem estatística distinta e independente da dimensão fractal, geometricamente invariável, que expressa uma medida da “densidade” da textura (Du Gan, 1998). Se a textura é densa, a lacunaridade é pequena. Em texturas naturais a medida de lacunaridade varia rapidamente na borda de diferentes regiões, permitindo extrair as bordas da imagem (Du Gan, 1998).

A fórmula de lacunaridade definida por Mandelbrot (1994) usa momentos estatísticos de ordem um e dois, e é dada por

$$\hat{\Lambda}(x) = \frac{\sigma^2(x) - \mu^2(x)}{\mu^2(x)}, \quad (9)$$

onde $\hat{\Lambda}(\cdot)$ denota a lacunaridade, σ^2 é a variância e μ é a média da variável aleatória x .

Turner (1998) estende a definição da lacunaridade para momentos estatísticos de ordem mais elevada, expressando a lacunaridade como

$$\hat{\Lambda}^n(x) = E \left[\left| \frac{x}{E[x]} - 1 \right|^n \right]^{1/n}, \quad (10)$$

onde $E[x]$ é o valor esperado de x e n é a ordem estatística. A expressão da lacunaridade usada neste trabalho é exatamente aquela em (10).

A *dimensão fractal* é uma medida matemática baseada em topologia, e é conhecida como dimensão de Hausdorff-Besicovitch (Turner et al., 1998). Ela pode ser calculada tomando o limite do quociente das mudanças logarítmicas em magnitude e em escala, à medida que a escala se aproxima de zero. Se uma curva pode ser subdividida em C partes, sendo o todo F vezes maior que cada uma delas, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch será (Turner et al., 1998)

$$D = \frac{\log C}{\log F}. \quad (11)$$

É o chamado método da auto-similaridade para o cálculo da dimensão fractal.

A dimensão fractal é muito utilizada para a caracterização de bordas, e é bem explorada na literatura científica (Pentland, 1984; Du Gan, 1998; Kaplan, 1999). Basicamente, o princípio se baseia na confrontação da dimensão fractal da imagem com as dimensões fractais de cada pixel da imagem (as dimensões dos pixels são calculadas levando em conta sua vizinhança). Os pixels com dimensão fractal menor que a dimensão fractal da imagem são localizados nas regiões de bordas (Pentland, 1984). O descritor fractal morfológico usado neste trabalho, o LMME, se baseia na dimensão fractal.

3 Metodologia

Para exemplificar as diferenças entre o uso da lacunaridade e do descritor fractal LMME (Côco, Salles e Sarcinelli Filho, 2007), foi usada a Figura 2.



Figura 2. Mosaico de teste (16x16 pixels).

Para cada pixel da imagem, a lacunaridade e o valor do descritor LMME da região envolvida pelo elemento estruturante “disco” de raio 1 foram calculados, e a representação dos resultados está nas ima-

gens das Figuras 3 e 4. Observe-se que tanto o descritor LMME quanto a medida de lacunaridade são bem seletivos em relação à borda, representando a mesma por apenas um pixel.

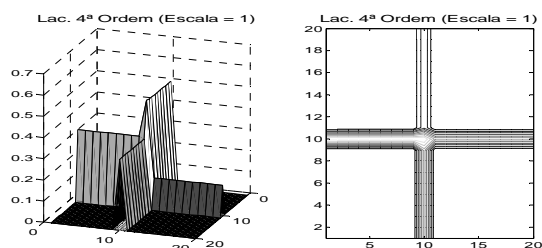


Figura 3. Representação da lacunaridade.

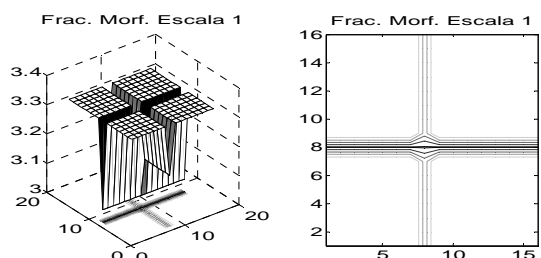


Figura 4. Representação do descritor LMME.

Todavia, o descritor LMME apresenta um “*offset*” na localização das bordas, ou seja, os “vales” da figura não chegam à medida zero na escala correspondente à dimensão fractal (escala vertical), enquanto que a lacunaridade expressa essa medida com valor zero de lacunaridade (escala vertical) nas regiões planas e valores positivos, diretamente relacionados à intensidade da variação dos níveis de cinza, entre as regiões que determinam as bordas.

A lacunaridade é uma medida que expressa somente as informações de bordas da imagem, não interferindo nas regiões “planas”. Esta pode ser uma boa ferramenta para melhorar a seletividade de bordas na segmentação, que é, em suma, o que se propõe neste trabalho.

4 Experimentos e Resultados

4.1 Obtenção do Banco de Filtros

Para exemplificar a aplicação do método neste trabalho, foi utilizada a composição de duas texturas de Brodatz para compor a imagem da Figura 5.

A mistura do modelo TICA foi montada com 2000 janelas 8x8 aleatoriamente selecionadas a partir da imagem da Figura 5. Dois bancos de filtros foram obtidos pela aplicação do modelo TICA, um usando a lacunaridade fractal (TICALF) e outro usando o descritor LMME (TICAFM), respectivamente, como critério topográfico. Cada banco é composto por 64 filtros (Figura 6). As bases obtidas pela TICALF (Figura 6-a) e pela TICAFM (Figura 6-b) apresentam estruturas denominadas de “*checkerboard-like*” no domínio espacial, ou seja, cada base possui várias

componentes em frequência orientadas em diferentes direções.

Já as Figuras 7 e 8 apresentam o espectro de energias e o contorno da representação no domínio da frequência da função de base número 6 dos bancos TICALF e TICAFM.

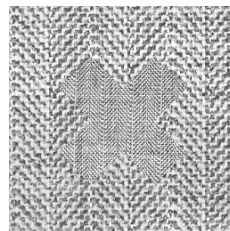
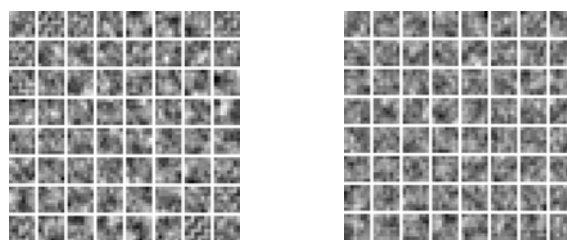


Figura 5. Mistura de duas texturas de Brodatz (256x256).



(a) (b)

Figura 6. Base da imagem obtida pela (a) TICALF de ordem 4 e (b) TICAFM.

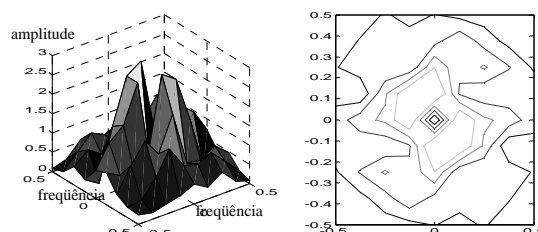


Figura 7. Função da base 6 obtida pela TICALF de ordem 4.

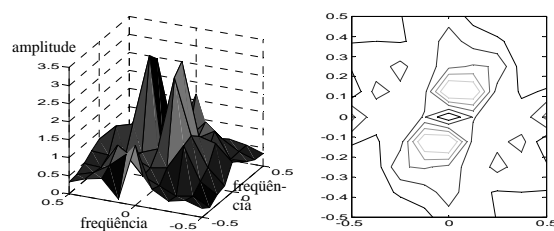


Figura 8. Função da base 6 obtida pela TICAFM.

Nestas duas figuras observa-se que o espectro da função da base possui aspecto rugoso, em relação à função de Gabor, e apresenta uma semelhança com esta função, porém com mais componentes em frequência que são relevantes para a caracterização do modelo da textura. Como apresentado em (Côco, Salles e Sarcinelli Filho, 2006) e (Côco, Salles e Sarcinelli Filho, 2007), essas características são inerentes aos modelos fractais na representação de imagens.

4.2 Minimização de Redundâncias

Cada filtro responde a uma propriedade específica da textura, possuindo alta energia na região em que está sintonizado e baixa energia nas demais regiões.

Visando minimizar a sobreposição de frequências, cada filtro foi normalizado em energia, e, para cada par de filtros da base, foi computada a norma entre eles. Os filtros com menor sobreposição foram selecionados. Tal seleção é feita para eliminar filtros redundantes, ou seja, eliminar filtros com a mesma banda.

A imagem, então, é submetida ao banco de filtros selecionados, e em seguida é aplicada a normalização logarítmica não linear proposta por Unser e Edem (1990), como aproximação do sistema visual humano. O resultado de tal operação é

$$e_k(x, y) = \log \left\{ \frac{1}{N^2} \sum_{a,b \in W} I_k^2(x-a, y-b) W(a,b) \right\}, \quad (12)$$

onde, I_k é a k -ésima imagem filtrada, W é uma janela Gaussiana de dimensão $(N \times N)$, em que $N = 2\sigma$, $\sigma = 2/\sqrt{3} f_0$, e f_0 é a frequência espacial dominante estimada.

A imagem característica e_k é submetida ao F-teste proposto em (Kasparis et al., 2001), que avalia se a imagem característica possui ou não variabilidade sobre a textura. O método é o seguinte: cada imagem característica é dividida em R regiões igualmente espaçadas compondo Ω_r , $r = 1, 2, \dots, R$. Para cada região é calculada a soma residual dos quadrados (RSS)

$$RSS_{kr} = \sum_{i,j \in \Omega} [e_k(i, j) - m_{kr}]^2, \quad (13)$$

onde r é a região, k indica a k -ésima imagem e m_{kr} é a média das características na região Ω_r .

O valor RSS_{kT} é obtido pela soma das regiões de RSS_{kr} para cada k , e RSS_k é obtido do mesmo modo que RSS_{kr} , só que para cada imagem característica. O F-teste é, então, efetuado como

$$F_k = \frac{(M - R)(RSS_k - RSS_{kT})}{(R - 1)RSS_{kT}}, \quad (14)$$

onde M é o número total de pixels em cada região. Tal equação mostra que se RSS_{kT} é próximo de RSS_k , então a imagem característica k não possui informação local.

4.3 Experimentos e Segmentação

As imagens selecionadas para compor as características para classificação foram submetidas ao algoritmo *K-means* (Duda e Hart, 2000). Diferentes limiares foram utilizados para minimização de redundâncias, resultando em diferentes tamanhos dos bancos de filtros. A Figura 9 mostra os gráficos de erro de segmentação das texturas, com o percentual de pixels de uma região que foram mapeados na outra região.

A Figura 10 apresenta o resultado da segmentação da Figura 5, sendo que a linha preta delimita a região de borda entre as texturas.

As Figuras 11 e 12 apresentam a segmentação de uma imagem de satélite em quatro regiões, usando as técnicas TICAFM e TICALF, neste último caso com ordens estatísticas 2 e 4.

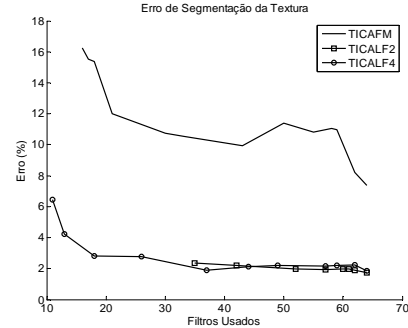


Figura 9. Erro da segmentação da textura.

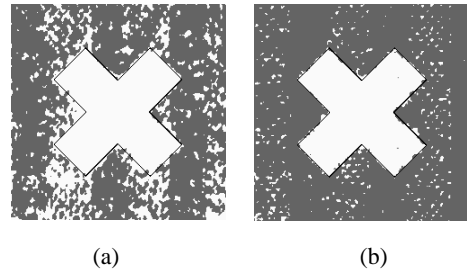


Figura 10. Segmentação efetuada com 30 filtros usando (a) TICAFM e (b) TICALF de ordem 4.

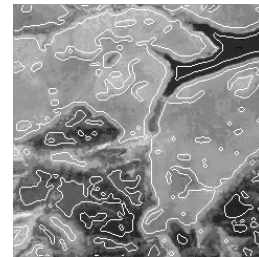


Figura 11. Resultado da Segmentação em 4 regiões TICAFM com 60 filtros.

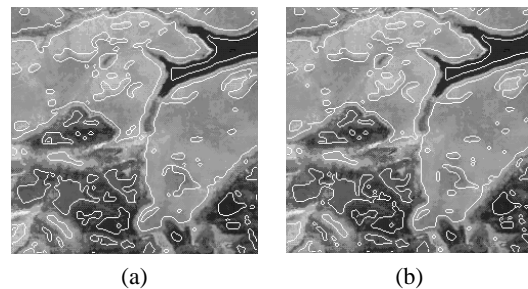


Figura 12. Resultado da Segmentação em 4 regiões TICALF com 60 filtros (a) segunda ordem estatística e (b) quarta ordem estatística.

Observa-se uma maior sensibilidade da medida de lacunariade em relação às singularidades das texturas. Em contrapartida, o compromisso entre a generalização e a especificidade intra-textura foi suficiente para uma boa classificação sem esbarrar na representação ruidosa inerente à modelagem de superfícies fractais.

5 Conclusões

No trabalho (Côco, Salles e Sarcinelli Filho, 2006) foi mostrado que o uso do descritor fractal LMME no critério topográfico é mais robusto na segmentação de texturas para uma quantidade menor de filtros, quando comparado com a energia, na técnica proposta por Hyvärinen, Hoyer e Inki (2001).

Nesta pesquisa, o uso do descritor LMME é comparado com o uso da medida de lacunaridade fractal, considerando alta ordem estatística, no critério topográfico da TICA. Uma primeira observação, de imediato, a partir do comportamento das máscaras nas Figuras 3 e 4, é que as informações de bordas são bem destacadas nos dois modelos. Todavia, o uso do descritor fractal LMME como critério topográfico no método TICA mostrou-se menos robusto na segmentação de texturas que a medida de lacunaridade fractal, para a composição de texturas de Brodatz usadas no experimento aqui apresentado (Figura 5).

Em relação à imagem de satélite, a segmentação utilizando a lacunaridade fractal permitiu, no geral, uma melhor caracterização das regiões segmentadas, em comparação com o descritor LMME. Entretanto, apenas em algumas regiões se observou diferenças significativas entre a medida de lacunaridade de segunda ordem e a de quarta ordem na segmentação da imagem de satélite. Isso se deve, basicamente, a características estatísticas relevantes que são melhor descritas nas respectivas ordens estatísticas do modelo TICALF nessas regiões da imagem.

Referências Bibliográficas

- Bell, A; Sejnowski, T. (1997) The 'independent components' of natural scenes are edge filters. *Vision Research*, **37** (23): 3327-3338.
- Blanco, José A. M. (1987) Jerarquización de Estructuras de Nivel Bajo y Medio para Reconocimiento Visual. Aplicaciones a Texturas y Formas. Tesis Doctoral, Departamento de Informática y Sistemas – Universidad Politécnica de Canarias, Espanha.
- Côco, K. F., Salles, E. O. T. e Sarcinelli Filho, M. (2005) Uso do parâmetro de hurst como critério topográfico na análise de componentes independentes. In *Anais do VII SBAI / II IEEE LARS*, São Luis – MA.
- Côco, K. F., Salles, E. O. T. e Sarcinelli Filho, M. (2006) Banco de filtros ICA topográfico fractal baseado em morfologia, aplicado na segmentação de texturas. In *Anais do XVI – Congresso Brasileiro de Automática*, Bahia, BR.
- Côco, K. F., Salles, E. O. T. e Sarcinelli Filho, M. (2007) Topographic independent component analysis based on fractal theory and morphology applied to texture segmentation, *Signal Processing*, **17** (8): 1966-1977.
- Daugman, J. G. (1985) Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency, and orientation optimized by two-dimensional visual cortical filters. *J. Opt. Soc. Am. A*, **2** (7): 1160-1169.
- Doi, Eizaburo, Lewicki, Michael S. (2005) Relations between the statistical regularities of natural images and the response properties of the early visual system. *Japanese Cognitive Science Society Sig P&P*, Univ. Kyoto, Japan, July 28, pp. 1-8.
- Du Gan Zhanghouhong. (1998) Application of High-order Fractal Feature to Edges Detection. In *Proceedings of ICSP 98*. pp. 1006-1008.
- Duda, Richard O., Hart, Peter E., Stork, David G. (2000) *Pattern classification*. New York, Willey.
- Hyvärinen, A., Hoyer, P. (2000) Emergence of phase and shift invariant features by decomposition of natural images into independent feature subspaces, *Neural Computation*, **12** (7): 1705-1720.
- Hyvärinen, Aapo; Hoyer, Patrik O.; Inki, Mika. (2001) Topographic independent component analysis. *Neural Computation* **13** (7): 1527-1558.
- Hyvärinen, Aapo., Karhunen, Juha, Oja, Erkki. (2001) *Independent component analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc. p. 158-160, 204, 382.
- Jenssen, R., Eltoft, T. (2003) Ica filter bank for segmentation of textured images. In *Proc. Int'l. Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA2003)*, pp. 827-832
- Kaplan, Lance M. (1999) Extended fractal analysis for texture classification and segmentation. *IEEE Trans. on Image Processing* **8** (11): 1572-1585.
- Kasparis, T., Charalampidis, D., Georgiopoulos, M., Rolland, J. (2001) Segmentation of textured images based on fractals and image filtering. *Pattern Recognition*, **34** (10): 1963-1973.
- Mandelbrot, B. B. (1994) "A Fractal's Lacunarity, and how it can be Tuned and Measured". *Fractals in biology and medic needs*. T F Nonnenmacher, G A Losa, E R Weibel (Basel and Boston: Birkhäuser Verlag).
- Pentland, A. P. (1984) Fractal based description of natural scenes, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6** (6): 661–674.
- Pratt, W. K. (1991) *Digital Image Processing*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Turner, Martin J., Blackledge, Jonathan M., Andrews, Patrick R. (1998) *Fractal geometry in digital imaging*. San Diego: Academic Press.
- Unser, M., Edem, M. (1990) Nonlinear operators for improving texture segmentation based on features extracted by spatial filtering. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **20** (4): 804-815.